جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تاریخ تحویل: ۲۵ آذر

تمرین سری پنجم

۱. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

- حاصل‌ضرب دو ماتریس مارکف لزوما یک ماتریس مارکف خواهد بود.
- اگر شرط مثبت بودن درایه‌های یک ماتریس مارکف را به نامنفی بودن تغییر دهیم، این امکان وجود دارد که به بیش از یک حالت پایدار برسیم.
- یک ماتریس مارکف نمی‌تواند منفی معین باشد.
- معکوس یک ماتریس متقارن (در صورت وجود) ممکن است متقارن نباشد.
- هر ماتریسی که مقادیر ویژه‌ی حقیقی و بردارهای ویژه‌ی حقیقی دارد، متقارن است.
- یک ماتریس متقارن با دترمینان مثبت، ممکن است مثبت معین نباشد.

پاسخ.

- درست
اگر A و B دو ماتریس مارکف باشند، هر درایه حاصل‌ضرب آنها از ضرب و جمع مقادیری مثبت به دست می‌آید که همواره مقداری مثبت خواهد بود.
همچنین اگر $s = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix}$ باشد، می‌دانیم $s^T A = s^T$ و $s^T B = s^T$. درنتیجه داریم:

$$s^T AB = s^T B = s^T$$

بنابراین جمع هر یک از ستون‌های ماتریس AB برابر با ۱ خواهد بود. با توجه به برقراری هر دو شرط، ماتریس AB نیز ماتریس مارکف خواهد بود.

- درست
برای مثال ماتریس همانی را در نظر بگیرید.
- درست
می‌دانیم هر ماتریس مارکوف حداقل یک مقدار ویژه برابر با ۱ دارد، پس نمی‌تواند منفی معین باشد.
- نادرست
معکوس یک ماتریس متقارن معکوس‌پذیر حتما متقارن است، زیرا:

$$S = Q\Lambda Q^{-۱} \Rightarrow S^{-۱} = (Q\Lambda Q^{-۱})^{-۱} = Q\Lambda^{-۱}Q^{-۱}$$

- نادرست
برای مثال در ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه حقیقی هستند، اما ماتریس متقارن نیست.

- درست
مثلا دترمینان ماتریس $-I_{n\times n}$ در صورتی که n زوج باشد، مثبت است اما مثبت معین نیست.

۲. فرض کنید $M_{n\times n}$ یک ماتریس معکوس‌پذیر با درایه‌های نامنفی باشد که جمع درایه‌های هر ستون آن برابر با ۱ است. چنین ماتریسی را یک ماتریس تصادفی می‌نامیم.

- نشان دهید جمع هر یک از ستون‌های ماتریس M^{-1} برابر با ۱ خواهد بود. .
- توضیح دهید چرا معکوس یک ماتریس تصادفی، لزوما ماتریس تصادفی نخواهد بود.
- نشان دهید اگر M ماتریس 2×2 با درایه‌های ناصفر باشد، معکوس آن هیچگاه نمی‌تواند ماتریسی تصادفی باشد.
- اگر $n > 2$ باشد، آیا می‌توان ماتریسی به جز ماتریس همانی پیدا کرد که خود و معکوس آن تصادفی باشند؟ در صورت وجود یک مثال بزنید و در صورت عدم وجود، اثبات کنید.

پاسخ.

- ابتدا نشان می‌دهیم اگر $A_{n\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد و $S_{m\times n}$ ماتریسی باشد که تمامی درایه‌های آن برابر با ۱ هستند و داشته باشیم $SA = S$، آنگاه جمع هر یک از ستون‌های ماتریس A برابر با ۱ خواهد بود.

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = 1$$

با توجه به تصادفی بودن ماتریس M، داریم $SM = S$. با ضرب طرفین این معادله در M^{-1} به معادله‌ی $SM^{-1} = S$ می‌رسیم و با توجه به قضیه بالا، می‌توان نتیجه گرفت که جمع هر یک از ستون‌های ماتریس M^{-1} برابر با ۱ است.

- با وجود این که شرط دوم تصادفی بودن ماتریس M^{-1} برقرار است، اما ممکن است درایه‌های آن اعدادی منفی باشند (با ذکر یک مثال نقض این موضوع را نشان دهید). در نتیجه معکوس یک ماتریس تصادفی لزوما تصادفی نخواهد بود.

- اگر ماتریس $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$ خواهد بود. حال اگر $ad - bc$ مثبت باشد، درایه‌های قطر فرعی و اگر منفی باشد، درایه‌های قطر اصلی M^{-1} منفی خواهد بود.

- بله، برای مثال ماتریس $M = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. در واقع یک ماتریس آماری متعامد می‌تواند پاسخ این سوال باشد.

۳. تنها با استفاده از مقادیر ویژه، پایداری معادلهٔ $Au = u'$ را به ازای Aهای زیر تعیین کنید:

- $A = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

پاسخ.

- $$\sigma(A) = \{-۱, -۳\}$$
  همهٔ مقادیر ویژه منفی هستند، پس سیستم پایدار است.
- $$\sigma(A) = \{۱, ۳\}$$
  ماتریس دارای مقدار ویژهٔ مثبت است، پس سیستم پایدار نیست.
- $$\sigma(A) = \{\pm i\}$$
  بخش حقیقی مقادیر ویژه نامثبت هستند و منفی نیستند، پس سیستم نیمه‌پایدار است.

۴. فرض کنید A و B متقارن هستند و $AB = BA$. ثابت کنید AB متقارن است. اگر $AB \neq BA$، آیا AB لزوماً متقارن است؟

پاسخ.

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

پس AB متقارن است.

مثال نقض برای قسمت دوم سوال:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

۵. برای هرکدام از ماتریس‌های متقارن زیر، Q و A را بدست آورید.

- $$X = \begin{bmatrix} ۲ & -۶ \\ -۶ & -۷ \end{bmatrix}$$
- $$Y = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

پاسخ.

- در ابتدا بایستی مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس را بدست آوریم:
مقادیر ویژه: $\lambda_۱ = -۱۰, \lambda_۲ = ۵$
بردارهای ویژه: $u_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}, u_۲ = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$
از مقادیر ویژه برای ساختن A و از نرمالایزشده‌ی بردارهای ویژه برای ساختن Q استفاده می‌کنیم.
در نتیجه داریم: $A = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۰ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}, Q = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$
- در ابتدا بایستی مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس را بدست آوریم:
مقادیر ویژه: $\lambda_۱ = ۰, \lambda_۲ = ۳, \lambda_۳ = -۳$
بردارهای ویژه: $u_۱ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}, u_۲ = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}, u_۳ = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$
از مقادیر ویژه برای ساختن A و از نرمالایزشده‌ی بردارهای ویژه برای ساختن Q استفاده می‌کنیم.
در نتیجه داریم: $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}, Q = \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$

۶. به‌ازای چه مقادیری از a و b، ماتریس‌های X و Y مثبت معین هستند؟ به طور کامل توضیح دهید.

- $$X = \begin{bmatrix} a & ۱ & ۱ \\ ۱ & a & ۱ \\ ۱ & ۱ & a \end{bmatrix}$$
- $$Y = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & b & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

پاسخ.

- با توجه به متقارن بودن ماتریس، اگر تمامی دترمینان‌های ماتریس‌های $k * k$ که از گوشه‌ی بالاچپ شروع می‌شوند، مثبت باشند، در اینصورت ماتریس ورودی، مثبت معین خواهد بود. دترمینان‌ها به

ترتیب برابرند با:
$|X_{11}| = a, |X_{22}| = a^2 - 1, |X_{33}| = (a-1)^2(a+2)$ که به ازای $a > 1$ همگی مثبت هستند.

- ماتریس داده‌شده متقارن است بنابراین همانند قسمت قبل عمل می‌کنیم. دترمینان‌ها به ترتیب برابرند با:
$|Y_{11}| = 1, |Y_{22}| = b - 4, |Y_{33}| = 12 - 4d$ که هیچ مقداری از d نمی‌توان یافت که هر سه معادله را مثبت کند، بنابراین هیچ‌گاه Y نمی‌تواند مثبت معین باشد.

۷. فرض کنید $C_{n\times n}$ یک ماتریس مثبت معین است.

- نشان دهید C^{-1} نیز مثبت معین است.
- اگر $Q_{n\times n}$ یک ماتریس متعامد دلخواه باشد، نشان دهید ماتریس QCQ^T مثبت معین است.
- اگر A یک ماتریس $n \times m$ باشد به گونه‌ای که $M = A^TCA$ مثبت معین نباشد، کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس M چه مقداری خواهد داشت؟ توضیح دهید.

پاسخ.

- با توجه به سوال ۱، می‌دانیم که معکوس ماتریس متقارن نیز متقارن است و یک ماتریس مثبت معین است هر گاه تمامی مقادیر ویژه‌ی آن مثبت باشند. همچنین مقادیر ویژه‌ی C^{-1} معکوس مقادیر ویژه‌ی C هستند که بنا بر مثبت معین بودن C، همگی مثبت‌اند. از آن‌جا که معکوس هر عدد مثبت نیز مثبت است، پس ماتریس C^{-1} هم مثبت معین خواهد بود.
- می‌دانیم به ازای هر بردار ناصفر x، $x^TCx > 0$. پس داریم:

$$x^TQCQ^Tx = (Q^Tx)^TCQ^Tx = y^TCy > 0$$

نامساوی آخر به دلیل مثبت معین بودن C و معکوس‌پذیری Q برقرار است، پس QCQ^T هم مثبت معین است.

- ماتریس M متقارن است زیرا:

$$M^T = A^TC^TA = A^TCA = M$$

پس تمامی مقادیر ویژه‌ی M حقیقی‌اند. حال چون طبق فرض مسئله می‌دانیم M مثبت معین نیست، باید مقدار ویژه‌ی نامثبتی داشته باشد. حال نشان می‌دهیم که M مقدار ویژه منفی‌ای ندارد و در واقع مثبت نیمه معین است.
با توجه به مثبت معین بودن C، به ازای هر بردار دلخواه y در $\mathbb{R}^n$، $y^TCy \geqslant 0$. حالت تساوی در صورتی رخ می‌دهد که y بردار صفر باشد. حال برای هر بردار x در $\mathbb{R}^m$ که $y = Ax$، داریم:

$$x^TMx = x^TA^TCAx = y^TCy \geqslant 0$$

با توجه به متقارن بودن ماتریس M و نامساوی بالا، M مثبت نیمه معین است و کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی آن برابر با صفر است.

۸. ماتریس K چه ویژگی‌هایی داشته‌باشد تا $\langle x, y\rangle = x^TKy$ ویژگی‌های ضرب داخلی را داشته باشد؟

پاسخ.

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\ \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle \Rightarrow \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\ \mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{K}\mathbf{x} \Rightarrow \forall i,j\ \mathbf{e}_i^T\mathbf{K}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^T\mathbf{K}\mathbf{e}_i$$

$$\Rightarrow \forall i,j\ \mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji}$$

پس ماتریس باید متقارن باشد.

$$\forall \mathbf{x}\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant ۰ \Rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{x} \geqslant ۰$$

پس ماتریس باید مثبت نیمه‌معین باشد.

$$(\mathbf{x} = ۰ \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = ۰) \Rightarrow (\mathbf{x} = ۰ \iff \mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{x} = ۰)$$

پس با توجه به این که ماتریس باید مثبت نیمه‌معین باشد، ماتریس باید مثبت معین باشد.

به سادگی دیده‌می‌شود که اگر ماتریس مثبت معین باشد، روابط بالا از آخر به اول برقرارند (شرط کافی). پس شرط لازم و کافی برای اینکه عبارت تعریف‌شده خواص ضرب داخلی را داشته‌باشد، مثبت معین بودن ماتریس است.